Repaso de integración

1. Tabla de integrales inmediatas

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$	$\int f(x)^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \ln \lvert f(x) \rvert + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = -\cos(f(x)) + C$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$
$\int \tan x \, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert + C$	$\int \tan(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = -\ln \lvert \cos(f(x)) \rvert + C$
$\int \operatorname{ctan} x \, dx = \ln \lvert \operatorname{sen} x \rvert + C$	$\int \operatorname{ctan}(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = \ln \lvert \operatorname{sen}(f(x)) \rvert + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x) \, dx = \tan(f(x)) + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cotan} x + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(f(x))} \cdot f'(x) \, dx = -\operatorname{cotan}(f(x)) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{arc\,sen}(f(x)) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$	$\int \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x) \, dx = \arctan(f(x)) + C$

[0]Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

2. Fórmula de integración por partes

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

La fórmula de integración por partes es aplicable cuando el integrando se puede expresar como producto de dos funciones, una de las cuales, dv, tiene integral inmediata y la otra, u, al derivarla, nos conduce a una función, du, de modo que el nuevo integrando vdu sea más sencillo.

Ejemplo 1. Hallar la integral $\int x \cos x \, dx$.

Resolución.

$$\int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x \, dx & v = -\operatorname{sen} x \end{array} \right] = -x \operatorname{sen} x - \int -\operatorname{sen} x \, dx = -x \operatorname{sen} x - \cos x + C$$

Ejemplo 2. Hallar la integral $\int x^2 e^x \, dx$.

Resolución.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - \left(2x e^x - \int 2 e^x \, dx \right) = \left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Hallar la integral $\int e^x \cos x \, dx$.

Resolución. Denotemos por $I = \int e^x \cos x \, dx$.

$$\begin{aligned} I = \int e^x \cos x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \cos x & du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{array} \right] = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen} x & du = \cos x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{array} \right] = e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx \right) \\ &= e^x \left(\cos x + \operatorname{sen} x \right) - I + C \end{aligned}$$

Despejando I, tenemos que

$$\boxed{I = \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\cos x + \operatorname{sen} x \right) + C}$$

[0]Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

Ejemplo 4. Hallar la integral $\int \ln x \, dx$.

Resolución.

$$\int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = dx & \quad\; v = x \end{array} \right] \;=\; x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + C$$

Consejos para elegir u y dv.

(1) Se debe comenzar por elegir dv. Para ello, en la escala de prioridades, la exponencial siempre tiene preferencia, seguida de las funciones trigonométricas "senoτ "coseno".

(2) Si en el integrando aparece una exponencial (que tenga primitiva), entonces se asigna dv a la exponencial.

(3) Si en el integrando aparece un "seno.º "coseno", entonces se le asigna también el dv, excepto cuando aparecen ambos (la exponencial y el "seno.º "coseno"), como es el caso del Ejemplo 3.

(4) En general, a los polinomios se les debe asignar u, puesto que si le asignamos dv, cuando se integra el polinomio para calcular v, el resultado que se obtiene es un polinomio de un grado superior. No obstante, esta regla tiene excepciones, como la del Ejemplo 4. en este ejemplo, no hay ninguna función que sea fácilmente integrable, por lo que no nos queda otro remedio que asignar dv al polinomio 1 multiplicado por dx.

[0]Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

3. Integrales de funciones racionales

En esta sección nos planteamos calcular integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios en x.

NOTA IMPORTANTE. Si el grado del polinomio $P(x)$ es mayor que el del polinomio $Q(x)$, entonces siempre podemos efectuar la división entre polinomios, de modo que el integrado lo podemos expresar como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

siendo $C(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) polinomios, este último, con grado estrictamente menor que el grado de $Q(x)$. Así, podemos descomponer la integral de partida en dos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

La primera de ellas es inmediata, puesto que se trata de la integral de un polinomio, mientras que la segunda puede que sea inmediata o puede que sea una integral de tipo racional como las que veremos a continuación.

Por tanto, desde este momento, supondremos que queremos hallar la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, donde el grado del polinomio $P(x)$ es estrictamente menor que el grado de $Q(x)$. Para ello, debemos seguir los siguientes pasos:

Paso 1. Factorizar el polinomio $Q(x)$. Tenemos que hallar todas sus raíces. Entre las raíces obtenidas, podemos encontrarnos con raíces reales y simples, raíces reales múltiples (con multiplicidad $r \geq 2$) o raíces complejas conjugadas ($\alpha \pm i\beta$). Para no complicar en exceso la exposición, supondremos que hemos obtenido una raíz real simple, a_0, una raíz real b_0 con multiplicidad $r \geq 2$ y dos raíces complejas conjugadas, $\alpha \pm i\beta$.

Paso 2. Expresamos el cociente $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_0} + \frac{B_1}{x-b_0} + \frac{B_2}{(x-b_0)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-b_0)^r} + \frac{Mx+N}{x^2-2x\alpha+\alpha^2+\beta^2} \tag{1}$$

Por tanto, debemos hallar los coeficientes $A, B_1, B_2, \ldots, B_r, M, N$ de modo que los dos miembros de la ecuación (1) sean iguales.

Paso 3. Como la integral de la suma es igual a la suma de las integrales, basta integrar cada uno de los sumandos del segundo miembro de la ecuación (1).

Ejemplo 1. Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^5+x^4-x-1}\,dx$.

Resolución. Vemos que se trata de una integral de tipo racional, puesto que el integrando es el cociente de dos polinomios, $P(x) = 2x+1$ y $Q(x) = x^5+x^4-x-1$. Vemos también que el grado del polinomio $P(x)$ es estrictamente menor que el de $Q(x)$. Así que seguimos los pasos anteriores.

[0]Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

Paso 1. Factorizamos el polinomio $Q(x) = x^5 + x^4 - x - 1$. Buscamos sus raíces, probando valores de x hasta conseguir que para alguno de ellos se anule. Por ejemplo, vemos que $Q(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$, por lo que deducimos que $x = 1$ es una raíz de $Q(x)$. Dividimos $Q(x)$ entre $(x - 1)$, cosa que podemos hacer por Ruffini: Tenemos que $Q(x) = (x - 1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$. Denotemos por $F(x) =$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. De nuevo, debemos encontrar algún valor de x para el que se anule el polinomio $F(x)$. Vemos, por ejemplo, que $F(-1) = 1 + 2 - 2 - 2 + 1 = 0$, con lo que tenemos que -1 es raíz de $F(x)$ y, por tanto, también lo es de $Q(x)$. Dividimos ahora por Ruffini el polinomio $F(x)$ entre $(x+1)$: Ahora nos va quedando $Q(x) = (x-1)(x+1)(x^3+x^2+x+1)$. Denotemos por $G(x) = x^3+x^2+x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

De nuevo, debemos encontrar algún valor de x para el que se anule el polinomio $G(x)$. Vemos, por ejemplo, que también se cumple $G(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$, con lo que tenemos que -1 es raíz de $G(x)$ y, por tanto, también lo es de $Q(x)$. Dividimos ahora por Ruffini el polinomio $G(x)$ entre $(x+1)$: Así que obtenemos $Q(x) = (x-1)(x+1)^2(x^2+1)$. Sólo nos queda factorizar el polinomio x^2+1. Pero

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

vemos que $x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm i$, con lo que no hay más raíces reales y sólo obtenemos dos raíces complejas conjugadas.

En resumen, hemos obtenido una raíz real simple, 1, una raíz real doble, -1 y dos raíces complejas conjugadas. *Paso 2.* Expresamos el cociente $\dfrac{2x+1}{x^5+x^4-x-1}$ como suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{2x+1}{x^5+x^4-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \tag{2}$$

Por tanto, debemos hallar los coeficientes A, B_1, B_2, M, N de modo que los dos miembros de la ecuación (2) sean iguales. Buscamos el máximo común denominador del segundo miembro de (2), que es $(x-1)(x+1)^2(x^2+1)$ (obsérvese que el máximo común denominador siempre es el mismo polinomio $Q(x)$,

[0]Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

pero factorizado). Así que tenemos que

$$\frac{2x+1}{x^5+x^4-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x+1)^2(x^2+1) + B_1(x-1)(x+1)(x^2+1) + B_2(x-1)(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+B_1+M)x^4 + (2A+B_2+M+N)x^3 + (2A-B_2-M+N)x^2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$+\frac{(2A+B_2-M-N)x + (A-B_1-B_2-N)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$$

Obsérvese que el primer y el último miembro de la cadena de igualdades anterior son dos cocientes iguales y que tienen el mismo denominador. Por tanto, los numeradores son iguales. Para que dos polinomios sean iguales, los coeficientes de cada monomio de un cierto grado deben coincidir. Es decir, el coeficientes del monomio x^4 debe ser igual en ambos polinomios, lo mismo con el de x^3, ..., y así hasta el término independiente. Esto nos permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B_1+M &=& 0 \\ 2A+B_2+M+N &=& 0 \\ 2A-B_2-M+N &=& 0 \\ 2A+B_2-M-N &=& 2 \\ A-B_1-B_2-N &=& 1 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $A = \frac{3}{8}$, $B_1 = \frac{-1}{8}$, $B_2 = \frac{1}{4}$, $M = \frac{-1}{4}$, $N = \frac{-3}{4}$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^5+x^4-x-1}\,dx &= \frac{3}{8}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &\quad -\frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) - \frac{3}{4}\arctan x + C \\ &= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x^2+1)}\right| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{3}{4}\arctan x + C\end{aligned}$$

[0]Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla